Sierpinski 体及其 Hausdorff 维数和 Hausdorff 测度

马春梅　张慧　张翔

西北师范大学数学与统计学院　甘肃兰州 730070

摘　要　给出了 Sierpinski 体的概念及构造过程，并求出其计盒维数和 Hausdorff 维数，同时计算出其 Hausdorff 测度的一个准确值。

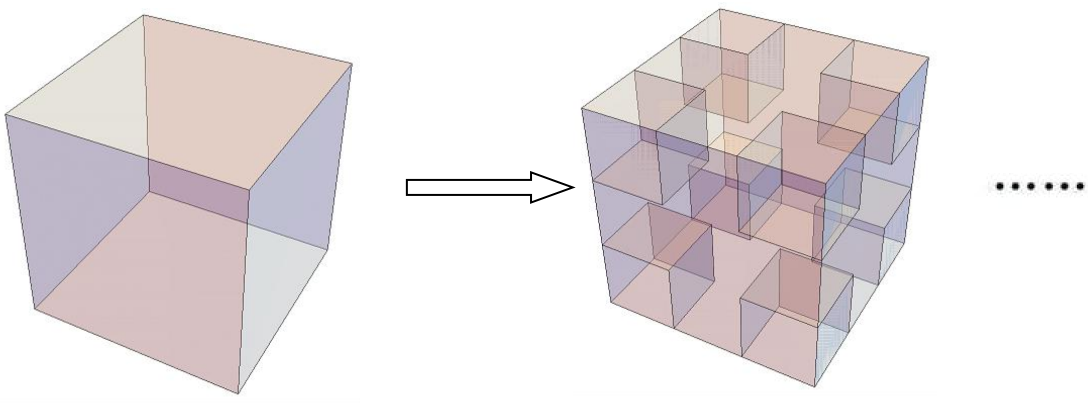
关键词　Sierpinski 体；计盒维数；Hausdorff 维数；Hausdorff 测度

1. 引言

在研究分形几何的过程中，计算一类自相似集的 Hausdorff 维数一直是一项基本但又非常困难的课题，所以该课题的研究深受人们的关注[1-7]。到目前为止，一类满足开集条件的自相似集分形的研究是比较成功的，该项研究认为这类分形的 Hausdorff 维数等于它的自相似维数。本文构造了一类 Sierpinski 体，并利用计盒维数和 Hausdorff 维数的关系，以及质量分布原理，得出了 Sierpinski 体的 Hausdorff 维数；同时利用文献[1]中的命题 1 及其推论，计算出了 Sierpinski 体的 Hausdorff 测度的准确值。

2. Sierpinski 体的概念及构造

设在 R^3 空间中作一个棱长为 1 的正方体，记作 E_0，将 E_0 的各棱长三等分，作棱长为 $\frac{1}{3}$ 的正方体，并将中间部分去掉，可以得到 8 个全等的小正方体，将这些小正方体组成的集合记作 E_1。对 E_1 的 8 个小正方体重复上述过程，得到的集合记作 E_2，如此继续下去，得到 $E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$，如图 1。



E_0　　　　E_1　　　　（图 1）

记集合 $E=\bigcap_{n=0}^{\infty}E_{\mathrm{n}}$，则 E 非空，称 E 为由 E_0 生成的 Sierpinski 体。

3. Sierpinski 体 E 的计盒维数

在计算 Sierpinski 体 E 的计盒维数之前，先给出 Sierpinski 体 E 的计盒维数的一个等价定义。

定理 1　以 $N_\delta(E)$ 表示与 E 相交，直径不大于 δ 的正方体的最少个数，则 E 的上、下计盒维数为：

$$\overline{\dim}_B(E)=\overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\lg N_\delta(E)}{-\lg\delta}，\quad \underline{\dim}_B(E)=\underline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\lg N_\delta(E)}{-\lg\delta}$$

证明：首先，由正方体的性质（中心对称图形），

我们知每个正方体都有一个内接球和一个外接球。

设 $\{U_{\mathrm{i}}\}$ 是直径不大于 δ 的 E 的正方体覆盖，

其中这些小正方体的所有外接球的集合也覆盖 E，

设上述外接球的最大直径为 δ'，则有 $\delta'=\mathrm{c}_1\delta$（$\mathrm{c}_1$ 为常数），

因此直径不大于 δ' 的覆盖 E 的球的最少个数 $N_{\delta'}(E)\le N_\delta(E)$，

所以

$$\underline{\dim}_B(E)=\underline{\lim_{\delta'\to 0}}\frac{\lg N_\delta(E)}{-\lg\delta'}\le\underline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\lg N_\delta(E)}{-\lg c_1-\lg\delta}=\underline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\lg N_\delta(E)}{-\lg\delta}$$

同理可证

$$\overline{\dim}_B(E)=\overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\lg N_\delta(E)}{-\lg\delta}$$

定理 2　Sierpinski 体 E 的计盒维数 $\dim_B(E)=\dfrac{\ln 8}{\ln 3}$

证明：由 E 的构造（$E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_{\mathrm{n}}\subset\cdots$）我们可以得到，

E_{n} 是 E 的一个自然覆盖，由 8^{n} 个棱长为$(\frac{1}{3})^{\mathrm{n}}$ 的正方体组成。

设 $\{U_{\mathrm{i}}\}$ 是直径不大于 δ 的 E 的正方体覆盖，

若满足$(\frac{1}{3})^{\mathrm{n}}\le\delta\le(\frac{1}{3})^{n-1}$，则 $N_\delta(E)\le 8^{\mathrm{n}}$，所以

$$\overline{\dim}_B(E)=\overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\lg N_\delta(E)}{-\lg\delta}\le\overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\lg 8^n}{-\lg(\frac{1}{3})^{n-1}}=-\frac{\ln 8}{\ln(\frac{1}{3})}=\frac{\ln 8}{\ln 3}$$

另一方面，若$(\frac{1}{3})^{n+1}\le\delta\le(\frac{1}{3})^n$，

则每个U_i都不能独立覆盖E_n的一个小正方体，

则$N_\delta(E)\ge 8^n$，所以

$$\underline{\dim}_B(E)=\underline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\lg N_\delta(E)}{-\lg\delta}\ge\underline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\lg 8^n}{-\lg(\frac{1}{3})^{n+1}}=-\frac{\ln 8}{\ln(\frac{1}{3})}=\frac{\ln 8}{\ln 3}$$

所以

$$\dim_B(E)=\frac{\ln 8}{\ln 3}$$

4. Sierpinski 体 E 的 Hausdorff 维数

定理 3　Sierpinski 体 E 的 Hausdorff 维数$\dim_H(E)=\frac{\ln 8}{\ln 3}$

证明：由定理 2，我们只需证明$\dim_H(E)\ge\frac{\ln 8}{\ln 3}$即可。

利用质量分配原理，在 E 上建立如下均匀质量分布：

令E_0上的均匀分布为 8；

E_1中的每个小正方体的质量分配为 1；

E_2中的每个小正方体的质量分配为$\frac{1}{8}$；

……

E_n中的每个小正方体的质量分配为$(\frac{1}{8})^{n-1}$；

……

这样就得到 E 上的自然质量分布μ，且$\mu(E)$=8.

设$\{U_i\}$是 E 的任一δ覆盖，当δ充分小时，对任意的$U_i\in\{U_i\}$，

$\exists\, n\in N$，使得$\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\le|U_i|\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$，

此时U_i至多与 4 个小正方体相交，则

$$\mu(U_i) \le 4\cdot\left(\tfrac{1}{8}\right)^n = 32\cdot\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^{\frac{\ln 8}{\ln 3}}\right)^{n+1} \le 32\cdot|U_i|^{\frac{\ln 8}{\ln 3}}$$

由质量分布原理得：

$$H^{\frac{\ln 8}{\ln 3}}(E) \ge \frac{\mu(E)}{32} = \frac{1}{4}$$

且

$$\dim_H(E) \ge \frac{\ln 8}{\ln 3}$$

所以

$$\dim_H(E) \ge \frac{\ln 8}{\ln 3}$$

5. Sierpinski 体 E 的 Hausdorff 测度

定理 4　Sierpinski 体 E 的 Hausdorff 测度 $\mathrm{H}^{\frac{\ln 8}{\ln 3}}(E) = \frac{8}{7}$

为证明此定理，我们先用以下方法重新构造 Sierpinski 体 E。

设在 R^3 空间中作一个棱长为 1 的正方体，将其棱上的点集记作 F_0，将 F_0 的各棱长三等分，作棱长为 $\frac{1}{3}$ 的正方体，并将中间部分去掉，可以得到 8 个全等的小正方体，将这些小正方体棱上的点集组成的集合记作 F_1。对 F_1 的 8 个小正方体重复上述过程，得到的集合记作 F_2，将上述过程无限重复下去，得到 $F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$

令集合 $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \lim_{n\to\infty} F_n$。

定理 5　$E = F$

证明：$E \supseteq F$ 显然成立，下证 $E \subseteq F$.

$\forall x \in E$，由 E 和 F 的构造过程知，必有 $x \in F$，则有 $E \subseteq F$；

综上所述，$E = F$。

根据文献[1]中的命题 1 及其推论，我们可以得到 $\mathrm{H}^{\frac{\ln 8}{\ln 3}}(F) \le \sum_{i=0}^{\infty} |U_i|^{\frac{\ln 8}{\ln 3}}$，其

中$\bigcup_{n=1}^{\infty}U_{\mathrm{n}}\supset F$.

下面证明定理 4 。

首先$\mathrm{H}^{\frac{\ln 8}{\ln 3}}(F)\le\sum_{i=0}^{\infty}\left|U_i\right|^{\frac{\ln 8}{\ln 3}}$，可知$\mathrm{H}^{\frac{\ln 8}{\ln 3}}(F)\le\dfrac{1}{1-(\frac{1}{3})^{\frac{\ln 8}{\ln 3}}}=\dfrac{8}{7}$成立。

下证$\mathrm{H}^{\frac{\ln 8}{\ln 3}}(F)\ge\dfrac{8}{7}$。

利用质量分配原理，在 F 上建立如下均匀质量分布：

令F_0上的每条边的均匀分布为 1；

F_1中的每个小正方体的每条边的质量分配为$\dfrac{1}{8}$；

F_2中的每个小正方体的每条边的质量分配为$(\dfrac{1}{8})^2$；

……

F_{n}中的每个小正方体的质量分配为$(\dfrac{1}{8})^{\mathrm{n}}$；

……

这样就得到 F 上的自然质量分布μ，且$\mu(F)$=12.

设$\{U_{\mathrm{i}}\}$是 F 的任一δ覆盖，当δ充分小时，对任意的$U_i\in\{U_{\mathrm{i}}\}$，$\exists\, n\in N$，

使得$\left(\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{n}+1}\le\left|U_i\right|\le\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$，此时$U_i$在$F_{\mathrm{n}+2}$中至多质量分配为

$8^2\times(\dfrac{1}{8})^{\mathrm{n}+2}=8\times(\dfrac{1}{8})^{\mathrm{n}+1}$，而

$$\mu\left(U_i\right)\le 8\times(\frac{1}{8})^{\mathrm{n}+1}=8\times(\left(\tfrac{1}{3}\right)^{\frac{\ln 8}{\ln 3}})^{n+1}\le\frac{21}{2}\left|U_i\right|^{\frac{\ln 8}{\ln 3}}$$

由质量分布原理得：

$$H^{\frac{\ln 8}{\ln 3}}(F)\ge\frac{\mu(F)}{\frac{21}{2}}=\frac{8}{7}$$

综上所述，$\mathrm{H}^{\frac{\ln 8}{\ln 3}}(F)=\dfrac{8}{7}$。

所以，Sierpinski 体 E 的 Hausdorff 测度$\mathrm{H}^{\frac{\ln 8}{\ln 3}}(E)=\mathrm{H}^{\frac{\ln 8}{\ln 3}}(F)=\dfrac{8}{7}$。

参考文献

[1] 周作领.自相似集的Hausdorff测度—Koch曲线[J].中国科学(A辑),1998,28(2):103-107.

[2] 许绍元, 周作领. 关于满足强分离开集条件的自相似集的Hausdorff测度[J].数学进展,2005,34(5):545-552.

[3] 王经民. 正四面体生成的Sierpinski块的Hausdorff测度[J]. 陕西师范大学学报: 自然科学版,2002,30:5-11.

[4] 周作领.Sierpinski垫片的Hausdorff测度[J]. 中国科学(A辑),1997,7(4):401-406.

[5] XU Shaoyuan.Connecting Hausdorff measure and upper convex density or H^S-a.e.covering[J].J Math Anal Appl,2005,311(1):324-337.

[6] 许绍元. 关于自相似集的Hausdorff测度的一个判据及其应用[J].数学进展,2002,31(2):157-162.

[7] 许绍元,刘静,陈晓运.正四面体生成的一般Sierpinski块的Hausdorff维数与Hausdorff测度的估计[J].自然科学版,2007,28(4):1-5.